



«Κώδικες Συνοριακών Στοιχείων Ανάλυσης Τάσεων και  
Μετατοπίσεων στις 2 και 3 Διαστάσεις»



Οι κώδικες συνοριακών στοιχείων στις 2 και 3 διαστάσεις παρουσιάστηκαν σε μια σειρά από άρθρα:

**Xiroudakis, G.**, Stavropoulou, M., & Exadaktylos, G. (2019). Three-dimensional elastic analysis of cracks with the g2 constant displacement discontinuity method. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 43(15): 2355-2382. <https://doi.org/10.1002/nag.2971>

Exadaktylos, G., **Xiroudakis, G.**, & Stavropoulou, M. (2018). Rolling disc model for rock cutting based on fracture mechanics. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 107:191-200. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2018.04.056>

Exadaktylos, G., **Xiroudakis, G.**, & Stavropoulou, M. (2017). Three-Dimensional Elastic Analysis of Rock Excavations by Using the g2 Constant Displacement Discontinuity Method. *Procedia Engineering*, 191: 1087-1095. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.05.282>



Οι κώδικες συνοριακών στοιχείων στις 2 και 3 διαστάσεις παρουσιάστηκαν σε μια σειρά από άρθρα:

Exadaktylos, G., & Xiroudakis, G. (2010). The G2 constant displacement discontinuity method - Part II: Solution of half-plane crack problems. *International Journal of Solids and Structures*, 47(18–19): 2578-2590. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.05.014>

Exadaktylos, G., & Xiroudakis, G. (2010). The G2 constant displacement discontinuity method - Part I: Solution of plane crack problems. *International Journal of Solids and Structures*, 47(18–19): 2568-2577. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.05.016>

Exadaktylos, G., & Xiroudakis, G. (2010). A G2 constant displacement discontinuity element for analysis of crack problems. *Computational Mechanics*, 45(4):245-261. <https://doi.org/10.1007/s00466-009-0440-1>



### **Μεταδιδακτορική έρευνα:**

Ξηρουδάκης Γ. (2017). 3DD -Υπολογιστικός κώδικας ανάλυσης τρι-διάστατων προβλημάτων της Γεωμηχανικής.

### **Διπλωματικές Εργασίες:**

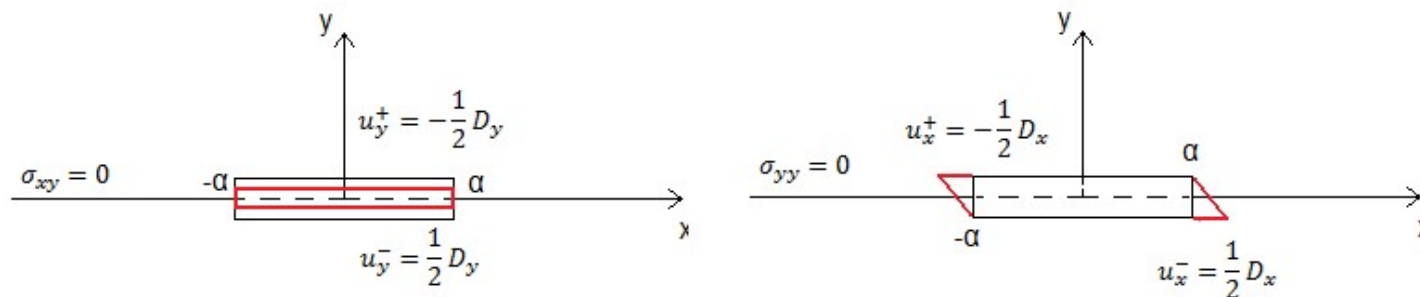
Σταντζούρης, Δ. (2014). Υπολογισμός τάσεων και μετατοπίσεων σε υπόγεια ανοίγματα με την αριθμητική μέθοδο των ασυνεχών μετατοπίσεων στις τρεις διαστάσεις. Διπλωματική Εργασία, Πολυτεχνείο Κρήτης, Σχολή Μηχανικών Ορυκτών Πόρων, Χανιά, Ελλάς.

Καπαρουνάκη, Ε. (2016). Υπολογιστική ανάλυση της υπόγειας μεθόδου εκμετάλλευσης διαδοχικών ορόφων με κενά μέτωπα. Διπλωματική Εργασία, Πολυτεχνείο Κρήτης, Σχολή Μηχανικών Ορυκτών Πόρων, Χανιά, Ελλάς.



## Μέθοδος Ασυνεχών Μετατοπίσεων

- Αναπτύχθηκε από τον Crouch (*Crouch, 1970, Crouch & Starfield, 1990*)



- Ορισμός ασυνεχούς μετατόπισης:  $D_i = u_i^- - u_i^+, i \equiv x, y, z$
- Η θεμελιώδης λύση της μεθόδου:  $f(x, y) = -\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \cdot \int_{-a}^a D_i(\xi) \cdot \ln\left(\sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}\right) d\xi$
- Οι εξισώσεις ισορροπίας – Εξίσωση Navier

$$\sigma_{ij,j} = 0 \rightarrow u_{i,jj} + \frac{1}{1 - 2\nu} u_{j,ij} = 0$$



## Το πρόβλημα της Υδραυλικής ρωγμής

Συνοριακές Προβλήματα

$$\begin{cases} \sigma_{yy} = -p \\ \sigma_{xy} = 0 \end{cases}, |x| < b, y = 0$$

Αναλυτική Λύση (*Sneddon & Lowengrub, 1969*)

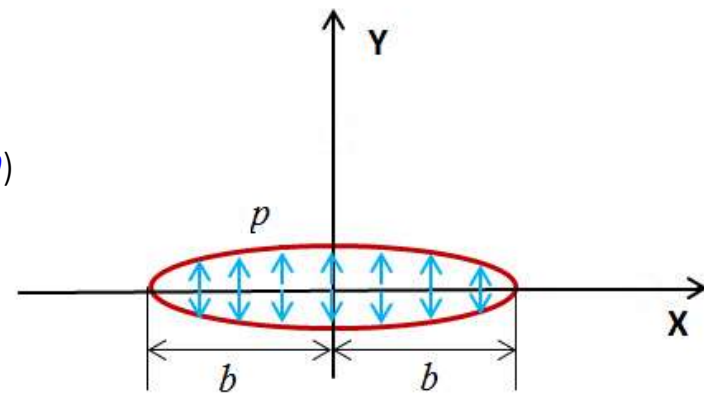
$$\hat{D}_y = -\frac{2 \cdot (1-\nu)}{G} \cdot p \cdot \sqrt{b^2 - x^2}$$

Ο ΣΕΤ

$$K_I = -\frac{G}{4 \cdot (1-\nu)} \cdot \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{r}} \cdot D_y(r) \right)_{r=b-x} \rightarrow$$

$$K_I = -\frac{G}{4 \cdot (1-\nu)} \cdot \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{r}} \cdot \left( -\frac{2 \cdot (1-\nu)p}{G} \sqrt{r(2b-r)} \right) \right) \rightarrow$$

$$K_I = \frac{p}{2} \sqrt{2\pi} \cdot \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2b-r}) = p\sqrt{\pi b}$$





## Το πρόβλημα της Υδραυλικής ρωγμής

Η Αριθμητική Μέθοδος

$$\sigma_{xx} = 2 \cdot G \{ [2 \cdot f_{,xy} + y \cdot f_{,xyy}] \cdot D_x + [f_{,yy} + y \cdot f_{,yyy}] \cdot D_y \}$$

$$\sigma_{yy} = 2 \cdot G \{ -y \cdot f_{,xyy} \cdot D_x + [f_{,yy} - y \cdot f_{,yyy}] \cdot D_y \}$$

$$\tau_{xy} = 2 \cdot G \{ [f_{,xy} + y \cdot f_{,xyy}] \cdot D_x - y \cdot f_{,xyy} \cdot D_y \}$$

Πρόβλημα καθαρά τύπου I ( $Dx=0$ )

$$\sigma_{yy}(x,0) = -\frac{a \cdot G}{\pi \cdot (1-\nu)} \cdot \frac{1}{x^2 - a^2} D_y$$

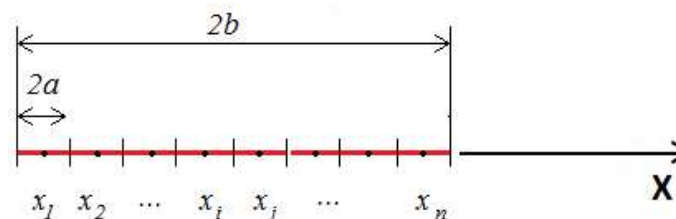
Επίδραση του στοιχείου  $j$  στο στοιχείο  $i$ :

$$\sigma_{yy}^i = -\frac{a_j \cdot G}{\pi \cdot (1-\nu)} \cdot \frac{1}{(x_i - x_j)^2 - a_j^2} D_y^j$$

Σύστημα επίλυσης  $n$  στοιχείων

$$-p = -\frac{G}{\pi \cdot (1-\nu)} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{(x_i - x_j)^2 - a_j^2} D_y^j, i = 1, \dots, n$$

Προσέγγιση ρωγμής με  $n$  συνεπίπεδα στοιχεία





## Το πρόβλημα της Υδραυλικής ρωγμής

Παράμετροι Επίλυσης:

$$G = 20000 \text{ [MPa]}$$

$$\rho = 1 \text{ [MPa]}$$

$$\nu = 0.3$$

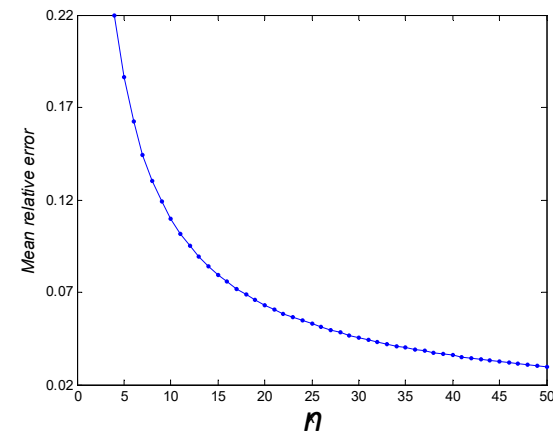
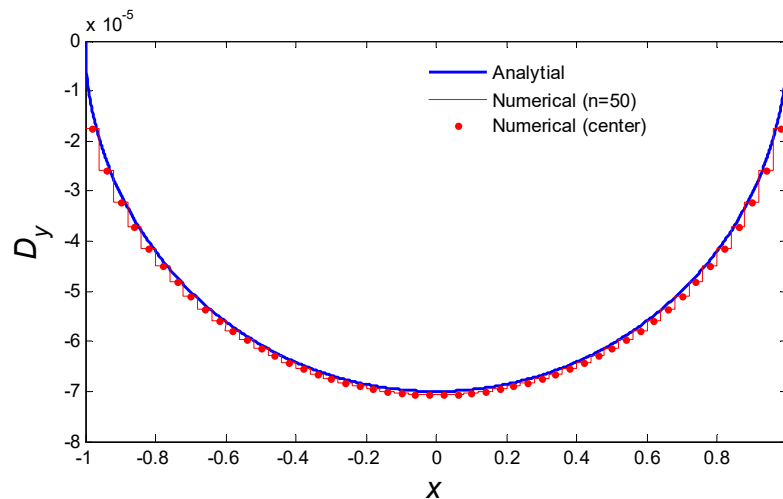
$$b = 1$$

$$n = 4 \text{ έως } 50$$

$$a = b/n$$

$$-p = -\frac{a_j \cdot G}{\pi \cdot (1-\nu)} \cdot \frac{1}{(x_i - x_j)^2 - a_j^2} D_y^j$$

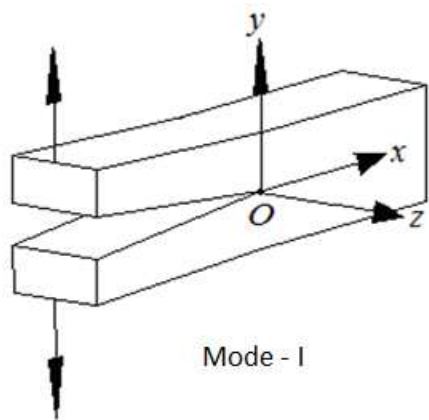
$$-\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{20000}{\pi \cdot 0.25 \cdot (1-0.3)} \cdot \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{15} & \frac{1}{35} \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{15} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{35} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_y^1 \\ D_y^2 \\ D_y^3 \\ D_y^4 \end{bmatrix}$$



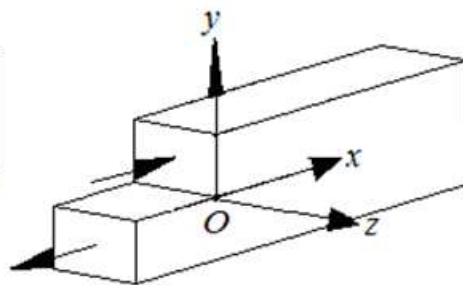




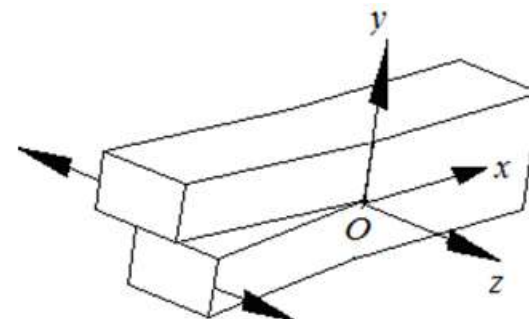
## Υπολογισμός Συντελεστών Εντάσεως των Τάσεων



Mode - I



Mode - II



Mode - III

$$K_I = -\frac{G}{4 \cdot (1-\nu)} \cdot \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{r}} \cdot D_y(r) \right) \approx -\frac{G}{4 \cdot (1-\nu)} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{a}} \cdot D_y(a)$$

$$K_{II} = -\frac{G}{4 \cdot (1-\nu)} \cdot \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{r}} \cdot D_x(r) \right) \approx -\frac{G}{4 \cdot (1-\nu)} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{a}} \cdot D_x(a)$$

$$K_{III} = -\frac{G}{4} \cdot \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{r}} \cdot D_z(r) \right) \approx -\frac{G}{4} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{a}} \cdot D_z(a)$$



## Το πρόβλημα της Υδραυλικής ρωγμής Υπολογισμός ΣΕΤ

$$-\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{2000}{\pi \cdot 0.25 \cdot (1-0.3)} \cdot \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{15} & \frac{1}{35} \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{15} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{35} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_y^1 \\ D_y^2 \\ D_y^3 \\ D_y^4 \end{bmatrix} \rightarrow D_y^i = \begin{bmatrix} -6.01E-05 \\ -7.73E-05 \\ -7.73E-05 \\ -6.01E-05 \end{bmatrix}$$

$$K_I \approx -\frac{20000}{4 \cdot (1-0.3)} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{0.25}} \cdot (-6.01E-5) = 2.15 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$$

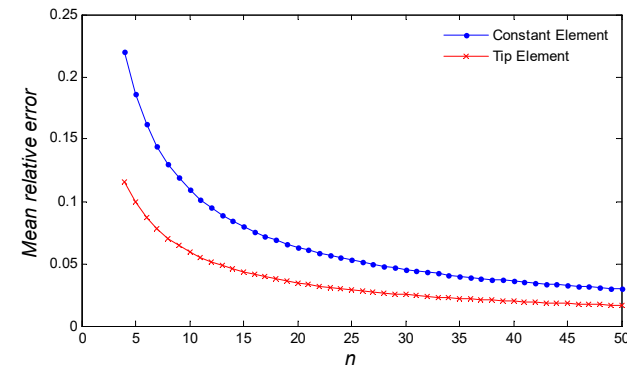
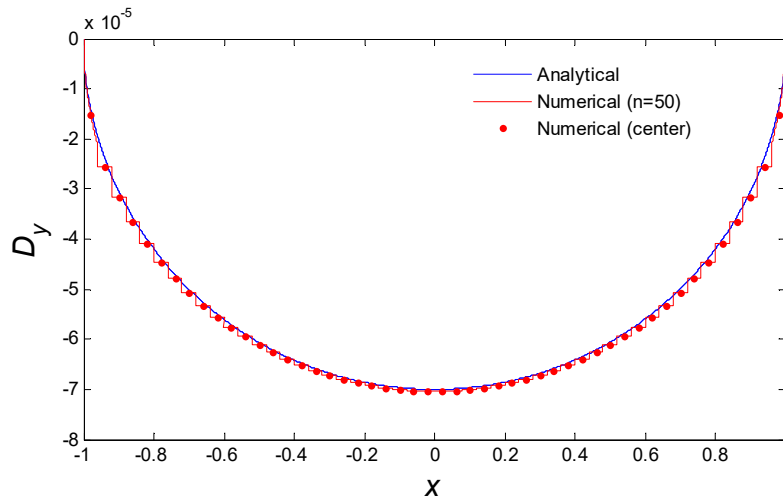
$$K_I = p \cdot \sqrt{\pi \cdot b} = \sqrt{\pi} = 1.77 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$$



## Ειδικά Στοιχεία αιχμής

$$D_y(\xi) = D_y \cdot \sqrt{a + \xi} \Rightarrow \sigma_{yy}^{tip-} = \frac{G}{2 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \cdot \left( \frac{\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{2 \cdot a}{x + a}}\right)}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{x + a}} - \frac{\sqrt{2}}{x - a} \right) D_y$$

$$D_y(\xi) = D_y \cdot \sqrt{a - \xi} \Rightarrow \sigma_{yy}^{tip+} = -\frac{G}{2 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \cdot \left( \frac{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2 \cdot a}}{\sqrt{x - a}}\right)}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{x - a}} - \frac{\sqrt{2}}{x + a} \right) D_y$$





## Βαθμωτή Ελαστικότητα

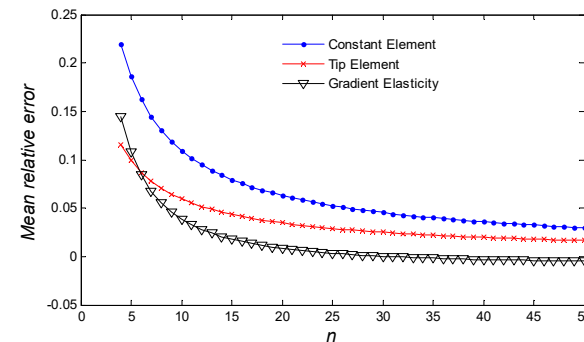
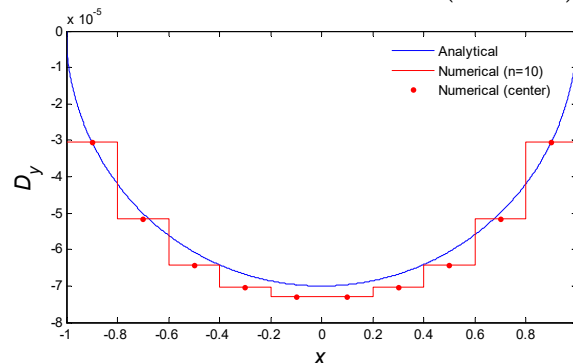
$$\sigma_{ij} = (1 - \ell^2 \cdot \nabla^2) \cdot (\lambda \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_{ij})$$

Ειδικό Στοιχείο Βαθμωτής Ελαστικότητας

$$\sigma_{yy}(x,0) = -\frac{a \cdot G}{\pi \cdot (1-\nu)} \cdot \frac{1}{x^2 - a^2} \cdot \left( 1 + 2 \cdot a^2 \cdot \ell^2 \cdot \frac{3 \cdot x^2 + a^2}{(x^2 - a^2)^2} \right) \cdot D_y$$

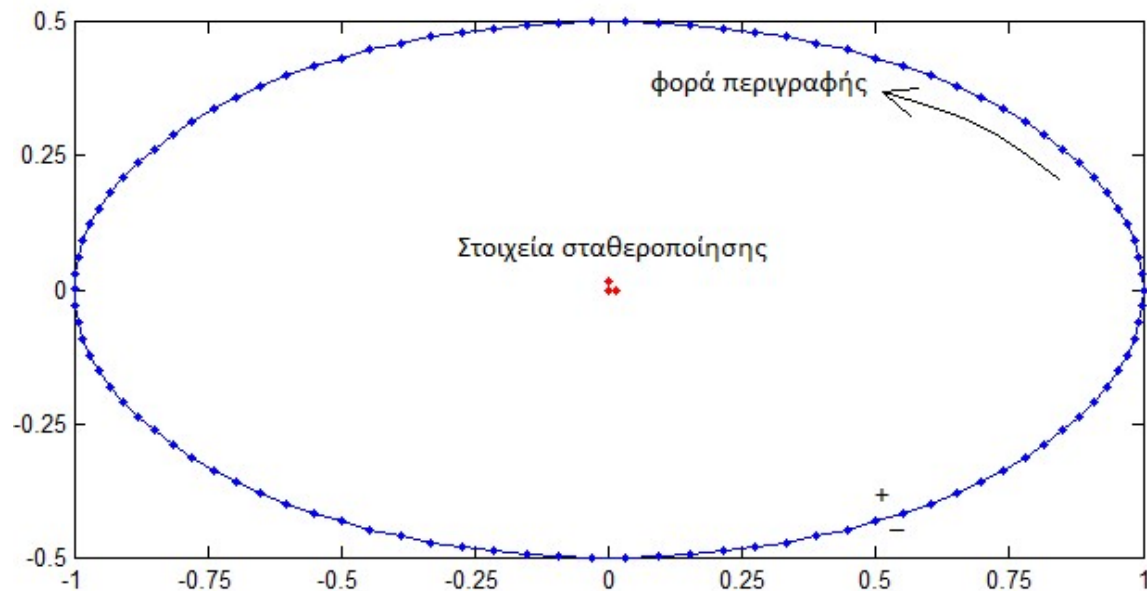
Εκτίμηση του εσωτερικού μήκους

$$D_y = -\frac{\pi \cdot (1-\nu) \cdot p}{G \cdot (1 + 2 \cdot \ell^2)} = -\frac{2 \cdot (1-\nu) \cdot p}{G} \Rightarrow \ell = \frac{\sqrt{\pi - 2}}{2}$$



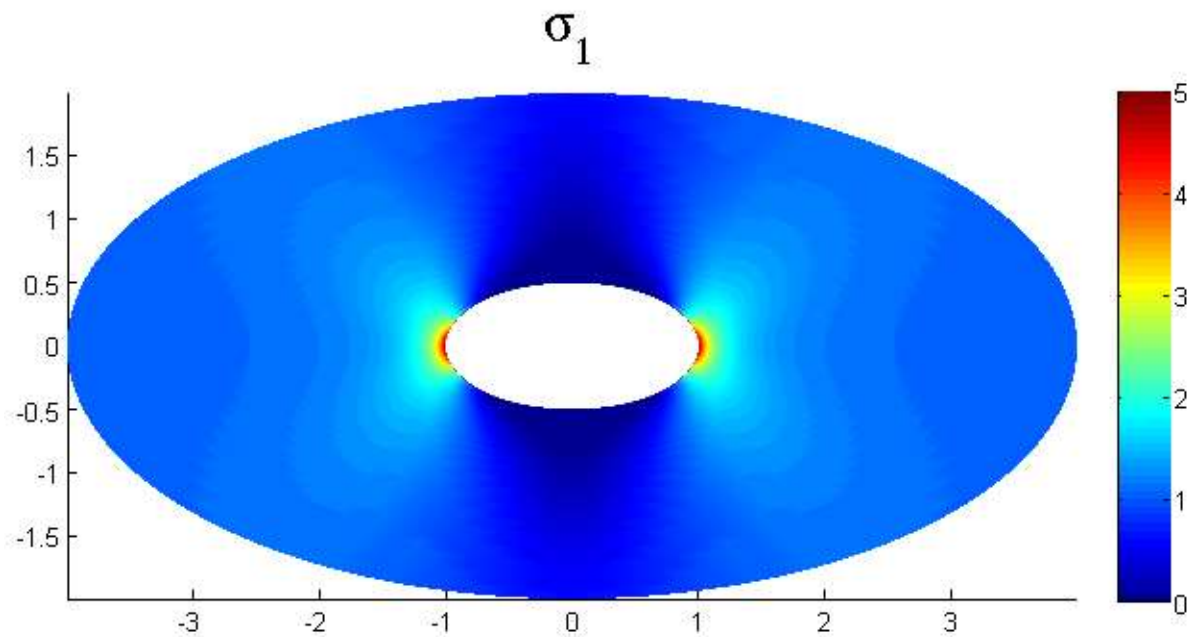


Αριθμητική Επίλυση Inglis  $b/a=0.5$  και μονοαξονική κατακόρυφη τάση  
μακρινού πεδίου  $\sigma=1\text{MPa}$



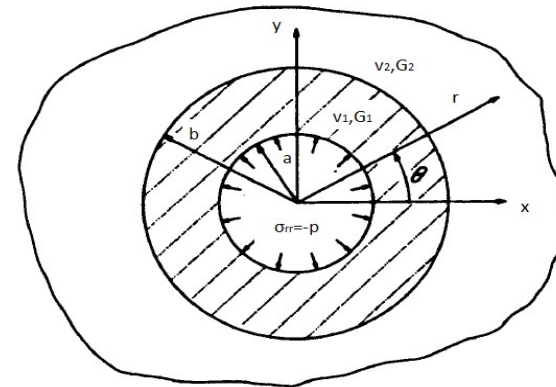
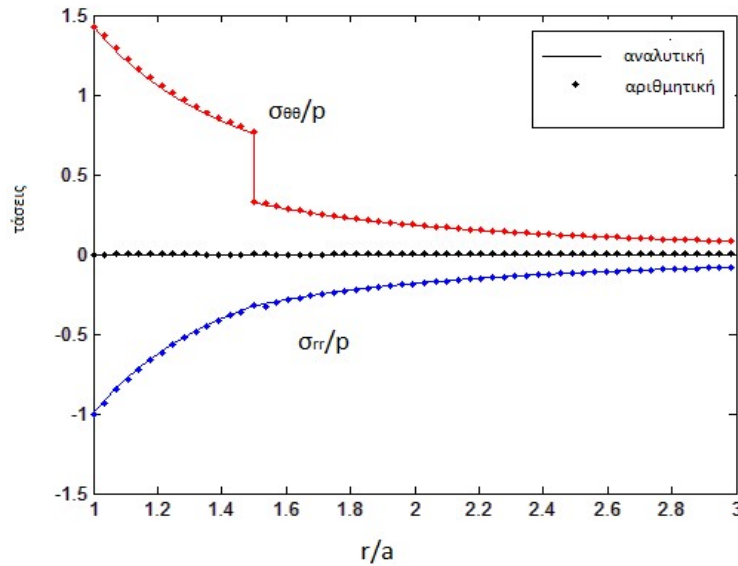


## Αριθμητική Επίλυση Inglis $b/a=0.5$





Υπολογισμός Τάσεων γύρω από υποστήριξη



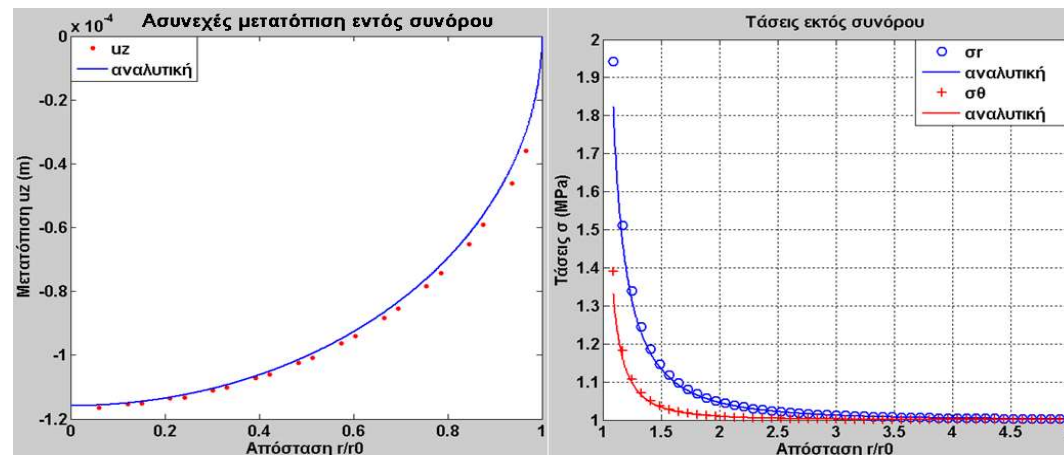
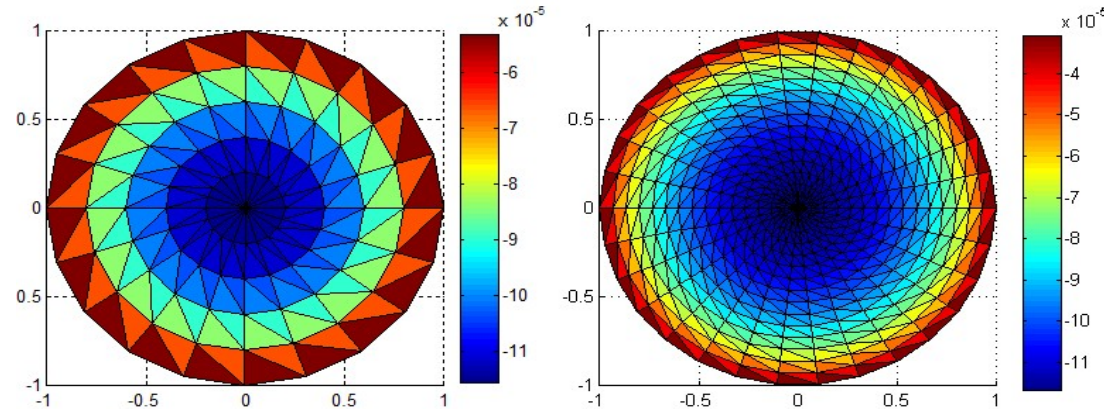
$$p' = \frac{2(1-\nu_1)a^2/b^2}{2(1-\nu_1) + (G_1/G_2 - 1)(1 - a^2/b^2)}$$

$$\frac{b}{a} = 1.5, \frac{E_2}{E_1} = 0.5, \frac{E_1}{p} = 20000, \nu_1 = \nu_2 = 0.25$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{1 - a^2/b^2} \left[ (pa^2/b^2 - p') - (p - p')a^2/r^2 \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{1 - a^2/b^2} \left[ (pa^2/b^2 - p') + (p - p')a^2/r^2 \right] \end{aligned} \right\} a \leq r \leq b$$



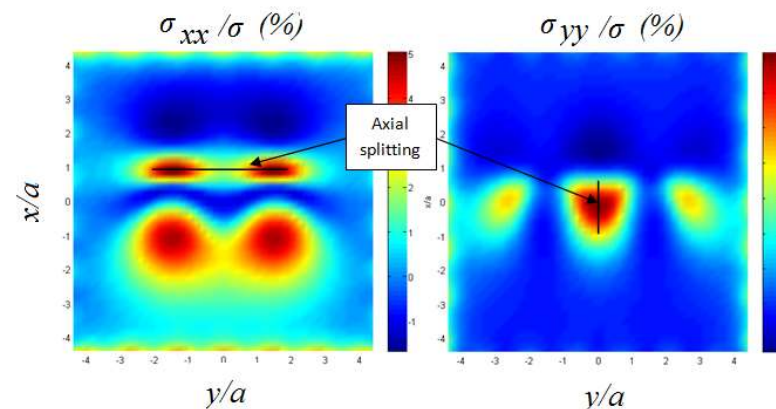
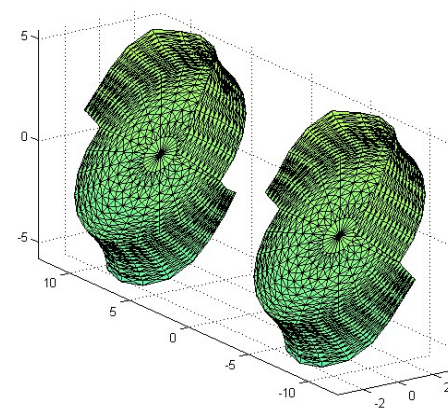
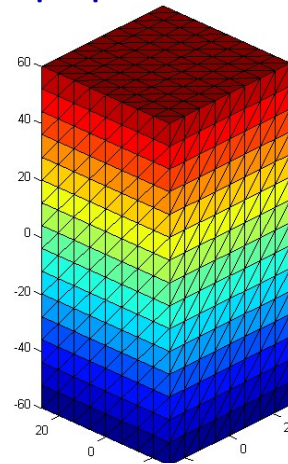
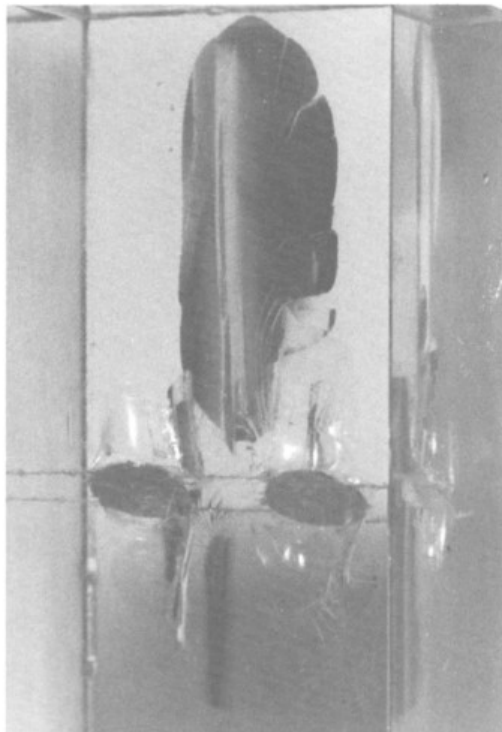
### Αριθμητική Επίλυση Κυκλικής Ρωγμής στις 3 Διαστάσεις







Αριθμητική Επίλυση Πειραμάτων του Dyskin et al., 1999





## Αριθμητική Επίλυση Σφαιρικής Κοιλότητας

