



«Κώδικας Σύμμορφου Μετασχηματισμού για Υπολογισμό  
Τάσεων Μετατοπίσεων σε Υπόγειες Εκσκαφές»



### Δημοσιεύσεις

Exadaktylos, G., Liolios, P. A., & Stavropoulou, M. C. (2003). A semi-analytical elastic stress–displacement solution for notched circular openings in rocks. *International Journal of Solids and Structures* , 40, 1165–1187.

Exadaktylos, G. E., & Stavropoulou, M. C. (2002). A closed-form elastic solution for stresses and displacements around tunnels. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 39(7). [https://doi.org/10.1016/S1365-1609\(02\)00079-5](https://doi.org/10.1016/S1365-1609(02)00079-5)

### Διπλωματική Εργασία:

Λιόλιος, Π. (2002). Ανάλυση τάσεων και μετατοπίσεων σε υπόγεια έργα και σήραγγες με τη μέθοδο των μιγαδικών δυναμικών. Διπλωματική Εργασία, Πολυτεχνείο Κρήτης, Τμήμα Μηχανικών Ορυκτών Πόρων, Χανιά, Ελλάς.



## Μιγαδικοί Αριθμοί

Ο φανταστικός αριθμός:  $i = \sqrt{-1}$

Το μιγαδικό επίπεδο:  $z = x + i \cdot y = r \cdot e^{i \cdot \theta} = r \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$

Ο συζυγής αριθμός:  $\bar{z} = x - i \cdot y = r \cdot e^{-i \cdot \theta} = r \cdot (\cos \theta - i \cdot \sin \theta)$

Το μέτρο:  $\|z\|^2 = z \cdot \bar{z} \rightarrow \begin{cases} (x + i \cdot y) \cdot (x - i \cdot y) = x^2 + y^2 \\ r \cdot e^{i \cdot \theta} \cdot r \cdot e^{-i \cdot \theta} = r^2 \end{cases}$

Ολομορφικές συναρτήσεις:  $f(z) = u + i \cdot v$

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(z)}{\partial x} = \frac{df(z)}{dz} \frac{dz}{dx} = f'(z) = \frac{\partial(u + i \cdot v)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(z)}{\partial y} = \frac{df(z)}{dz} \frac{dz}{dy} = i \cdot f'(z) = \frac{\partial(u + i \cdot v)}{\partial y} \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$



## Η Μέθοδος των Μιγαδικών Δυναμικών Kolosov-Muskhelishvili

Οι εκφράσεις των τάσεων:

$$\sigma_{yy} + \sigma_{xx} = 4 \cdot \Re(\phi'(z))$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2 \cdot i \cdot \sigma_{xy} = 2 \cdot (\bar{z} \cdot \phi''(z) + \chi''(z)) = 2 \cdot (\bar{z} \cdot \phi''(z) + \psi'(z))$$

Οι εκφράσεις των μετατοπίσεων:

$$2 \cdot G \cdot (u + i \cdot v) = k \cdot \phi(z) - z \cdot \overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \quad k = \begin{cases} 3 - 4\nu, & \text{plain strain} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu}, & \text{plain stress} \end{cases}$$

Οι εκφράσεις σε πολικές συντεταγμένες:

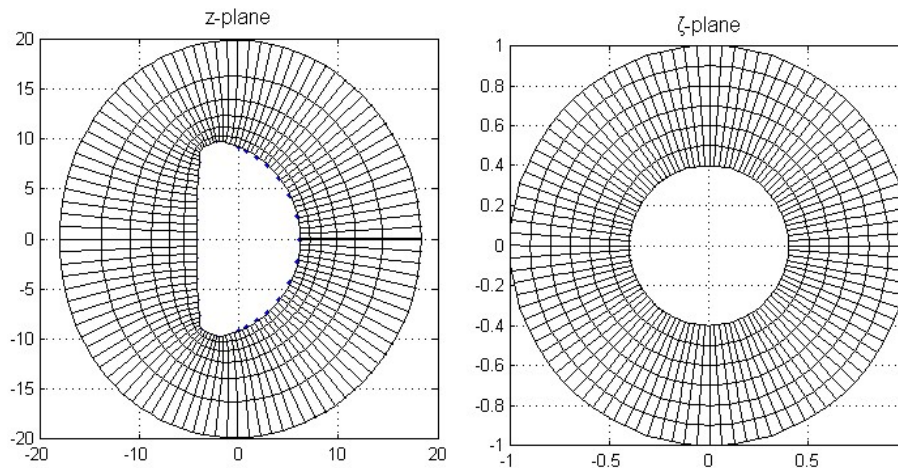
$$\sigma_{yy} + \sigma_{xx} = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}$$

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2 \cdot i \cdot \sigma_{r\theta} = \exp(2 \cdot i \cdot \theta) \cdot (\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2 \cdot i \cdot \sigma_{xy})$$

$$u_r + i \cdot u_\theta = \exp(-i \cdot \theta) \cdot (u + iv)$$



## Ο σύμμορφος μετασχηματισμός



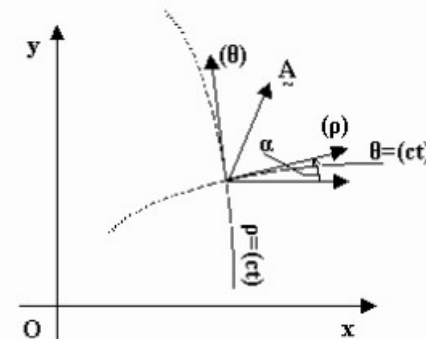
$$z = \omega(\zeta) = \frac{a_0}{\zeta} + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \zeta^k$$

$$\phi'(z) = \frac{d\phi(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

$$e^{2\alpha} = \frac{\zeta^2 [\omega'(\zeta)]^2}{\rho^2 \|\omega'(\zeta)\|^2} = \frac{\zeta^2 \omega'(\zeta)}{\rho^2 \overline{\omega'(\zeta)}}$$

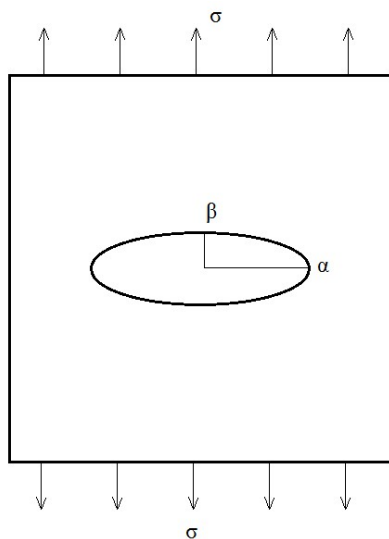
$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = 4\Re e \left( \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right) = 4\Re e(\Phi(\zeta))$$

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho + 2 \cdot i \cdot \sigma_{\rho\theta} = \frac{2\zeta^2}{\rho^2 \overline{\omega'(\zeta)}} \left[ \overline{\omega(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \psi'(\zeta) \right]$$





## Ο σύμμορφος μετασχηματισμός-Έλλειψη



$$z = \omega(\zeta) = A \cdot \left( \frac{1}{\zeta} + B \cdot \zeta \right), \quad A = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad B = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$$

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) &= \Gamma \cdot \omega(\zeta) + \phi_0(\zeta) \\ \psi(\zeta) &= \Gamma' \cdot \omega(\zeta) + \psi_0(\zeta) \end{aligned} \quad \Gamma = \frac{\sigma}{4}, \quad \Gamma' = \frac{\sigma}{2}$$

$$\phi_0(\zeta) = -\frac{\sigma}{2} \cdot A \cdot (1+B) \cdot \zeta$$

$$\psi_0(\zeta) = \frac{\sigma}{2} \cdot A \cdot (1+B) \cdot \left[ -\zeta + \frac{(\zeta^3 + B \cdot \zeta)}{(B \cdot \zeta^2 - 1)} \right]$$

$$\zeta = r \cdot e^{i\theta} \xrightarrow{r=1} \zeta_0 = \cos\theta + i \cdot \sin\theta$$

$$\sigma_\rho = \sigma_{\rho\theta} = 0$$

$$\sigma_\theta = \sigma \frac{1 - B(2+B) + 2 \cos(2\theta)}{1 + B^2 - 2B \cdot \cos(2\theta)}$$

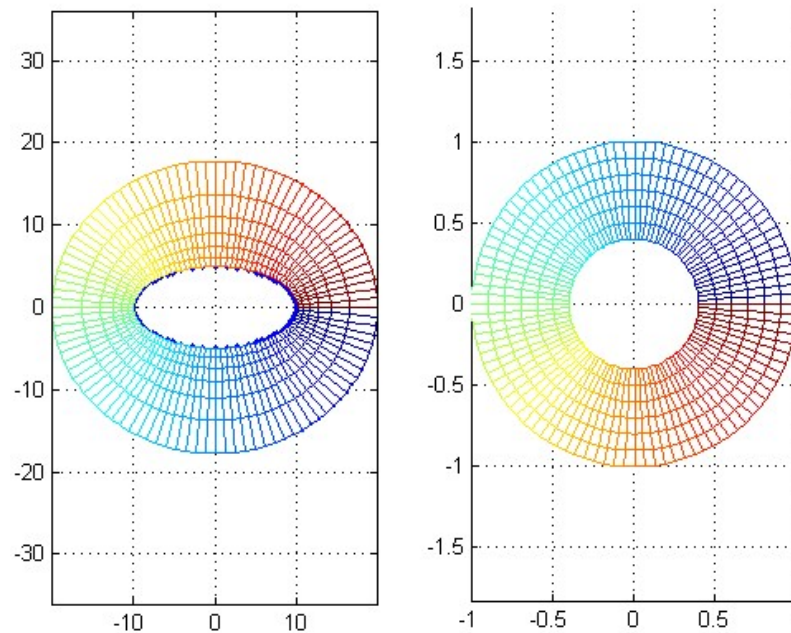
$$\sigma_\theta(\theta=0) = \sigma \frac{B+3}{1-B} = \sigma \left( 1 + 2 \frac{a}{\beta} \right)$$

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = 4 \Re \left( \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right) = 4 \Re(\Phi(\zeta))$$

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho + 2 \cdot i \cdot \sigma_{\rho\theta} = \frac{2\zeta^2}{\rho^2 \overline{\omega'(\zeta)}} \left[ \overline{\omega(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \psi'(\zeta) \right]$$



## Ο σύμμορφος μετασχηματισμός-Έλλειψη





## Ο σύμμορφος μετασχηματισμός-Έλλειψη

